JKPM | Jurnal Kajian Pembelajaran Matematika
VOLUME 2 NOMOR 2, OKTOBER 2018
ISSN: 2549 – 8584 (online). http://journal2.um.ac.id/index.php/jkpm

PROSES BERPIKIR MAHASISWA DALAM MEMBUKTIKAN PROPOSISI: KONSEPTUALISASI-GAMBAR

Lathiful Anwar, Syaiful Hamzah Nasution, Sudirman, Susiswo
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

Email : lathiful.anwar.fmipa@um.ac.id

Abstract
Evidence is an absolute feature of mathematics and a key component in mathematics education. Although the evidence is very important, the fact is that the evidence is something that is difficult to teach or learn. One of the difficulty factors is the inadequacy of conceptual concepts and the inability to use definitions to structure evidentiary structures. This paper will describe the thinking process of students in proving a geometric proposition. Four concept of image conceptualization framework is used as a tool to explore students' thinking processes in proving a geometric proposition. One student's work and vignette, FMZ, was analyzed to provide a visualization of the image-conceptualization process used by FMZ in identifying a proposition. The results of the analysis confirm that the ability to construct evidence is related to the ability to conceptualize images, find local-local conceptualizations (traits / conclusions related to one part of the image) and global conceptualization and link relational relationships between local conceptualizations and global conceptualization into a series of statements supporting propositions / conclusion which will be proven to be a series of logical statements.

Keywords*: conceptualizations of images, geometric propositions, proofs, thinking processes*

Submit : 17 November 2017, Publish: Oktober 2018

PENDAHULUAN

NCTM (2000) menekankan pentingnya geometri dengan menyatakan "ide-ide geometris berguna dalam mewakili dan memecahkan masalah dalam bidang matematika dan dalam situasi dunia nyata". Studi geometri membantu siswa mengembangkan keterampilan berpikir kritis, penalaran deduktif, dan argumen yang logis. Dengan demikian, hal ini membantu siswa efisien memecahkan masalah yang mereka hadapi dalam kehidupan sehari-hari (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2013). Dengan ini, geometri adalah salah satu jembatan antara obyek konkrit dan pemikiran abstrak. Namun, beberapa hasil penelitian menunjukkan bahwa siswa tidak belajar geometri secara bermakna dan efisien (Oflaz, Bulut, & Akcakin, 2016).

Bukti merupakan fitur penting dalam matematika dan berperan sebagai komponen kunci dalam Pendidikan matematika (Jone, 2000; Miyazaki, Fujita, & Jones, 2017), bagain fundamental dari proses berpikir matematis (Kwoen, 2002). Bukti merupakan hal terpenting dalam memahami matematika secara jelas dan efektif. Dan memahami sebagai aspek dasar dalam Pendidikan disadari sebagai tujuan penting dari semua proses belajar dan pembelajaran matematika dalam Pendidikan matematika (Ozmantar, 2017).

Namun pada kenyataannya, bukti sulit untuk diajarkan dan dipelajari. Berdasarkan hasil wawancara dengan mahasiswa yang belajar pembuktian matematika, mereka menemui banyak kesulitan dalam menyelesaikan masalah terkait pembuktian suatu pernyataan matematis. Penelitian yang yang dilakukan oleh Moore (1994) menyimpulkan bahwa ada tujuh factor yang menyebabkan siswa kesulitan untuk mengonstruksi suatu bukti yakni ketidakmampuan siswa dalam menyatakan definisi, konsep image yang tidak tepat, ketidakmampuan dalam menggunakan definsi untuk menginstruksi bukti, tidak kompeten dalam memahami bahasa matematis dan simbol.

Proses berpikir mahasiswa dalam menyelesaikan suatu permasalahan dapat diklasifikasikan menjadi beberapa tingkatan atau level yang berbeda sesuai dengan kemampuannya. Level kemampuan mahasiswa selalu menjadi perhatian dosen (Guven & Baki, 2010), tidak terkecuali pada materi geometri. Salah satu cara untuk mengetahui tingkatan kemampuan mahasiswa adalah dengan melihat proses berpikir dalam menyelesaikan masalah geometri.

Mengetahui proses berpikir mahasiswa dalam memecahkan suatu masalah adalah hal penting bagi dosen. Dalam tulisan ini, framework 4 prinsip konseptualisasi gambar digunakan sebagai alat untuk mengeksplorasi proses berpikir siswa dalam membuktikan suatu proposisi geometris. Proses konseptualisasi suatu subjek yang berhasil membuktikan suatu proposisi dipilih untuk memberikan suatu ilustrasi proses konseptualisasi yang terjadi pada saat membuktikan sutu proposisi. Dengan mengetahui proses berpikir mahasiswa, dosen dapat melacak letak dan jenis kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa dalam proses pemecahan masalah. Kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa dapat dijadikan sumber informasi belajar dan pemahaman bagi mahasiswa. Selain itu dosen dapat merancang pembelajaran yang sesuai dengan kemampuan mahasiswa.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yang bertujuan untuk mendeskripsikan proses berpikir (transisi ke berpikir formal) subjek penelitian dalam mengkonstruksi bukti dari suatu proposisi geometri dengan menggunakan kerangka konseptualisasi gambar sebagai kerangka kerja dalam merekam atau memotret transisi berpikir subjek penelitian dan level pemahaman struktur pembuktian sebagai acuan dalam menganalisis level pemahamannya. Untuk mendukung proses analisisnya, peneliti menggunakan empat prinsip konseptualisasi yang dikemukakan Handscomb (2006) untuk menganalisis/menginterpretasi tulisan/bukti tertulis dari subjek sebagai representasi berpikirnya dan model pemahaman struktur bukti yang dikembangkan oleh Miyazaki, Fujita, & Jones (2017) untuk mengases level pemahaman struktur pembuktian geometri.

Subjek penelitian adalah mahasiswa tahun pertama jurusan matematika angkatan 2016/2017 yang mengampu matakuliah Matematika Dasar III yang diampu oleh salah satu peneliti. Tidak semua mahasiswa yang mengambil matakuliah Matematika Dasar III yang akan dianalisis, peneliti hanya menggunakan sample sebanyak 6 mahasiswa yang merepresentasikan heterogintas atas kemampuan penalaran dan gender. Klasifikasi kemampuan penelaran didasarkan pada nilai tes UTS subjek penelitian.

Instrumen penelitian yang digunakan meliputi soal, Interview, rekaman (Video-Audio). Soal yang diajadikan acuan adalah soal Ujian Tengah Semester yang diambil (diterjemahkan) dari latihan soal di buku "Geometry, A Contemporary Course". Jawaban (tertlis) subjek atas soal UTS tersebut dijadikan acuan untuk memotret proses berpikir siswa adalah jawaban tertulis soal ujian tengah semester tentang pembuktian proposisi. Interview dilakukan dengan tujuan untuk menkonfirmasi tulisan subjek pada jawaban sehingga menjadi data pelengkap untuk menginterpretasi berpikirnya subjek penelitian. Jenis interview yang digunakan adalah interview semi-structured interview (internal validity terkait pengumpulan data), dimana pertanyaan interview didasarkan atas respon yang diberikan oleh subjek. Proses interview akan direkam secara audio-visual, data audio selanjutkan dibuatkan transkrip pembicaraan sedangkan audio untuk menginterpretasi bihaviour/Bahasa tubuh subjek untuk mendukung interpretasi berpikirnya subjek dengan tujuan menjada reliabilitas koleksi data.

Data hasil Ujian Tengah Semester dianalisis untuk mengetahui proses berpikir mahasiswa dalam mengkonstrusi bukti proposisi. Analisis data hasil interview dilakukan dengan langkah reduksi data, pemaparan data yang meliputi pengklasifikasi dan identifikasi data, dan menarik kesimpulan dari data yang telah dikumpulkan dan memverifikasi kesimpulan tersebut. Untuk menjaga validitas data analis, kami menggunakan data triangulasi meliputi audio-video recording, tulisan/pekerjaan siswa, catatan siswa selama interview.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembuktian Geometris

Dalam tulisannya Dumas and McCharthy (2014) menyatakan bahwa pengertian atau definisi bukti matematis bergantung pada konteksnya. Ada dua sudut pandang tentang bukti matematis, yakni dalam konteks formal dan praktis. Dalam konteks formal, bukti matematis dipandang sebagai serangkaian pernyataan matematis dalam bentuk aksioma deduktif logis yang mengikuti pernyataan sebelumnya. Sedangkan dalam konteks praktis, bukti matematis didefinisikan sebagai argument matematis yang bersifat persuasive yang meyakinkan pengetahuan orang lain tentang sebuah kebenaran dari pernyataan matematis (Dumas & McCarthy, 2014 pg. 69).

Dalam konteks matematika sekolah, bukti matematis didefinisikan sebagai argument matematis yang merupakan rangkaian pernyataan yang mendukung atau menyangkal sebuah klaim yang memiliki tiga karakteristik. Karakteristik pertama adalah bukti sebagai kumpulan pernyataan yang diterima kebenarannya seperti teorema, aksioma dan definisi. Karakteristik kedua adalah mode argumentasi yang meliputi aturan-aturan inferensi logis (syllogism, universal instantiation), bukti langsung, bukti tak langsung/kontradiksi. Karakteristik yang terakhir adalah mode representasi argumentasi seperti naratif, diagramatik, simbolik (Stylianides, 2007).

Tall (1995) berpendapat bahwa pembuktian Euclid merupakan langkah awal yang bagus untuk mengembangkan ketelitian bukti logis. Tall (1999) dalam artikel lainnya menyatakaan bahwa bukti euclid bias dipandang sebagai suatu bukti generic verbal yang berlaku untuk seluruh gambar geometris yang memiliki sifat yang diberikan. Pada kebanyakan masalah bukti geometris, premis biasanya diberikan dalam bentuk verbal atau informasi simbolis bersama dengan gambar geometrisnya. Dengan kata lain, bentuk dari masalah/problem di pembuktian geometris biasanya berbentuk "Diberikan X, tunjukkan bahwa Y, dimana makna gambar dari X dan Y tertanam didalamnya. Dengan demikian, tujuan dari proses pembuktian adalah mengkonstrukci serangkain pernyataan/argument dari X ke Y yang didukung penalaran deduktif. Oleh karena itu, proses mental dalam mengonstruksi bukti harus menintegrasikan dua macam informasi: informasi visual dan informasi konseptual yang merepresentasikan premis yang sudah diberikan secara eksplisit (Ufer, Heinze, & Reiss, 2009).

Gambar, Konsep dan Konseptualisasi Gambar

Konten dari apa yang dipikirkan akan disebut sebagai representasi mental (a mental representation). Untuk tujuan investigasi berpikir geometris, ada tiga representasi mental yang relevan yakni persepsi (percepts), gambar (images), dan konsep (concepts). Persepsi (percept) didefiniskan sebagai representasi dari stimulus yang diterima (Handscomb, 2005). Karena persepsi ada sebagai representasi dalam fikiran, operasi mental bisa menunjukkan sifat-sifat dari persepsi seperti warna, bentuk, dan seterusnya.

Gambar (image) didefinisikan sebagai suatu mental representasi yang memberi reaksi pada pengalaman dari pengamatan pada keberadaan dari stimulan visual dari mata. Seperti halnya persepsi, hal ini memungkinkan untuk berpikir dari gambar sebagai yang diproyeksikan pada matriks/acuan mental, tapi dalam hal ini data yang diproyeksikan sudah disimpan dalam pikiran. Persepsi bisa saja salah untuk suatu gambar, sebagai contoh halusinasi, mimpi dan semua mengindikasikan bahwa gambar bisa salah untuk suatu persepsi, namun bukti-bukti eksperimental menunjukkan bahwa kebalikannya yang benar.

Ketika situasi geometris diberikan secara verbal, hal ini mungkin penting untuk membayangkan suatu gambar yang berkesesuaian (korespondingnya) dalam rangka untuk menyediakan masukan intuitif pada proses bernalar. Gambar tersebut mungkin di transfer ke media eksternal, seperti gambar pada kertas, untuk memantapkannya. Lebih lanjut konstruksi mungkin bisa divisualisasikan dan ditambahkan pada gambar tersebut untuk menyelesaikan masalah, atau berbagai transformasi mungkin dibayangkan. Selanjutnya, dalam penelitian ini, kata gambar (image) digunakan untuk menggantikan kata gambar geometris, dengan pemahaman bahwa hal ini bisa merujuk pada persepsi, gambar, atau keduanya tergantung pada konteksnya.

Pikiran membutuhkan suatu cara untuk merepresentasikan sesuatu yang abstrak, konsep umum. Gambar tidak akan bisa, tapi kata-kata bisa melakukan fungsi tersebut. "Kucing" tidak merujuk pada suatu binatang dan "persegi" tidak merujuk pada suatu bentuk tertentu. Walaupun, kata-kata tersebut merujuk pada keseluruhan kelas dari objek yang berbagi sifat-sifat tertentu. Konsep mendefinisikan representasi mental yang menaruhnya pada bentuk Bahasa. Suatu konsep bersifat abstrak dan umum. Selanjutnya istilah konsep dalam penelitian ini akan selalu merujuk pada suatu pernyataan.

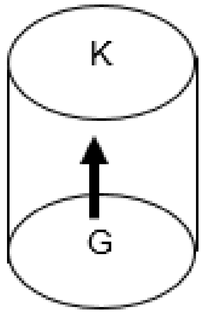
Gambar dan konsep adalah dua cara pikiran menyimpan informasi geometris. Teori dual-code yang dikemukakan oleh Paivio (dalam Handscomb, 2005)) menyatakan bahwa representasi di simpan dalam dua format, yakni gambar visual dan konsep verbal.

Konseptualisasi gambar (conceptualization of an image) adalah representasi konseptual tentang suatu gambar (image) (Handscomb, 2006). Konseptualisasi ini berisi satu atau lebih pernyataan dan pernyataan ini akan disimpulkan menjadi sifat-sifat. Suatu gambar (image) biasanya akan memiliki beberapa sifat-sifat, dan himpunan bagian dari sifat-sifat tersebut adalah konseptualisasi.

Sebagai ilustrasi: sebuah pintu yang dipandang sebagai persegi panjang mempunyai empat sisi karena pintu adalah persegi panjang dan fakta bahwa persegi panjang mengharuskan bahwa dia memiliki empat sisi; "empat sisi" merupakan sifat utama. Dilain pihak, pintu yang dipandang sebagai suatu persegi panjangyang kebetulan berwarna coklat karena "warna coklat" bukan sifat yang mengikuti fakta bahwa itu merupakan persegi panjang. Dalam hal ini, gambarnya (image) adalah pintu dan konsepnya adalah "persegi panjang."

Konseptualisasi dalam perspektif lain adalah apa yang dikemukakan oleh Godfrey (dalam Handscomb, 2005) yakni "geometrical 'eye'". Dia merujuk pada perkembangan siswa bahwa kekuatan dari sifat penglihatan geometris adalah mengurai/melepaskan sifat-sifat tersebut dari gambarnya.

Konseptualisasi K dari suatu gambar G ditunjukkan pada Gambar 1. Pada gambar ini terlihat bahwa gambar oval yang bawah mewakili representasi gambar (G), oval yang atas mewakili representasi konseptualisasi (K), panah lurus mewakili pembentukan konseptualisasi, dan panah lengkung, yang muncul pada gambar berikutnya, mewakili proses deduksi/menyimpulkan.

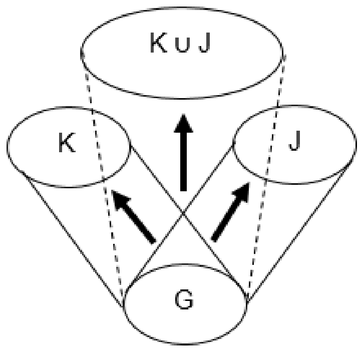


Gambar 1. Gambar konseptualisasi

Ada empat prinsip dalam proses konseptualisasi, diantaranya:

a. Prinsip 1

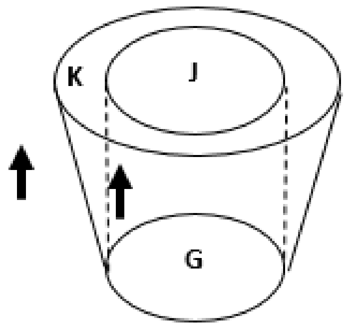
Misalkan K dan J adalah dua konseptualisasi dari suatu gambar G, maka gabungan dari sifat-sifat K dan J juga merupakan konseptualisasi dari G. Prinsip mengikuti langsung dari definisi konseptualisasi. Hal ini memberikan sebuah metode penggabungan konseptualisasi. Gambar 2 menunjukkan Prinsip 1 konseptualisasi.



Gambar 2. Prinsip 1 konseptualisasi

b. Prinsip 2

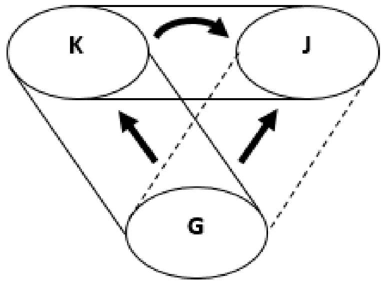
Jika K adalah suatu konseptualisasi dari suatu gambar G, dan J adalah himpunan bagian dari K, maka J juga merupakan konseptualisasi dari G. Gambar 3 menunjukkan Prinsip 2 konseptualisasi



Gambar 3. Prinsip 2 konseptualisasi

c. Prinsip 3

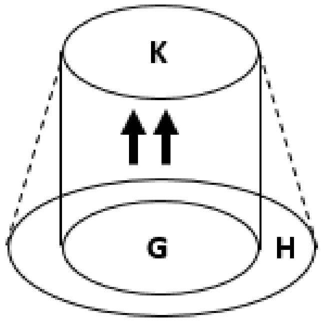
Jika K adalah konseptualisasi dari gambar G, dan sifat dari J bisa disimpulkan dari sifat K, maka J juga merupakan konseptualisasi dari G. prinsip ketiga berarti bahwa sebarang tambahan sifat dari geometer menyimpulkan dari sifat-sifat suatu gambar akan menjadi sifat dari gambar. Prinsip 3 seperti hipetsa silogisme dari bentuk $P \to Q$ dan $Q \to R$ sehingga $P \to R$, kecuali bahwa jika C adalah konseptualisasi dari G bukan suatu penarikan kesimpulan logis. Gambar 4 menunjukkan Prinsip 3 konseptualisasi.



Gambar 4. Prinsip 3 konseptualisasi

d. Prinsip 4

Jika gambar H memuat gambar G, dan K adalah konseptualisasi dari G, maka K adalah konseptualisasi H. dengan kata lain, jika suatu sifat benar untuk sebagain dari gambar, maka hal tersebut benar untuk keseluruhan gambar. Validitas dari prinsip ini masih dipertanyakan. Namun, selanjutnya akan didiskusikan, gambar geometris bisa dijelaskan menjadi suatu sistem hingga suatu titik, garis, dan kurva. Jika suatu sifat benar dari suatu system, maka itu pasti benar pada suatu system yang sama dengan penambahan suatu titik, garis atau kurva, dan prinsip 4 akan mengikuti pembuktian induksi. Gambar 5 menunjukkan Prinsip 4 konseptualisasi.



Gambar 5. Prinsip 4 konseptualisasi

Hal ini mungkin untuk memeulai dengan reprsentasi konseptual C dan kemudian bentuk gambar G sehingga C mengkonseptualisasi gambar G. Dalam hal ini, G adalah percontohan (*Instantiation*) dari C. Sebagai contoh, diberikan suatu konsep "persegi", seorang siswa mungkin menggambar segiempat sama sisi dengan empat sisi berukuran sama dan empat sudut berukuran sama. "persegi" mengkopseptualisasi gambar, dan gambar adalah percontohan dari "persegi". Konseptualisasi dan percontohan adalah operasi invers.

Pemahaman Bukti Geometris

Dalam artikelnya, Miyazaki, Fujita and Jones (2017) menyatakan bahwa ada tiga aspek penting dalam buktidan pembuktian meliputi pemahaman bukti sebagai sebuah struktur objek, melihat bukti sebagai sebuah proses intellectual dan pemahaman akan peran dan makna bukti dan pembuktian. Dengan memandang sebuah bukti sebagai suatu struktur objek memungkinkan seseorang untuk mengetahui komponen-komponen dari bukti dan hubungan diantara mereka, bagaiman komponen tersebut membentuk bukti dan bagaimana struktur ini dibutuhkan. Dalam konteks bukti geometris, struktur bukti dilihat sebagai jaringan, network, proposisi singular dan universal antara premis dan kesimpulan yang dihubungkan oleh penalaran logis universal instantiation dan hypothetical syllogism (Miyazaki, Fujita, Jones, & Iwanaga, 2017). Proposisi universal dalan konteks ini meliputi aksioma, teorema dan definisi yang digunakan untuk mendukung penarikan kesimpulan/klaim. Singular proposisi dalam hal ini merupakan pernyataan-pernyatan yang terbentuk dalam proses konstruksi bukti.

Miyazaki, Fujita and Jones (2017) mengemukakan bahwa ada tiga level pemahaman struktur bukti, yakni level pra-struktural, level parsial-struktural dan level holistik-struktural. Pada level pra-struktural, siswa memandang sebuah bukti sebagai kumpulan objek simbolis tanpa makna. Siswa gagal untuk mengidentifikasi komponen-komponen bukti seperti singular proposisi, universal proposisi, premis, kesimpulan serta penghubung antar komponen-komponen tersebut seperti universal instantiation dan hypothetical syllogism. Ketika siswa sudah mulai mengenal komponen struktur bukti, maka level pemahaman mereka berada di sublevel parsial-struktural elemental. Namun, mengetahui komponen saja tidak cukup untuk memahami struktur bukti. Siswa butuk untuk mengetahui penalaran deduktif seperti hypothetical syllogism dan universal instantiation sebagai alasan pendukung untuk menyimpulkan premis. Pada sub-level partial-struktural relasional, siswa sudah mengerti hypothetical syllogism dan universal instantiation dan mampu menggunakan teorema, aksioma atau definisi sebagai alas an pendukung, tetapi mereka mengkonstruksi atau menerima bukti yang memuat 'logical circularity'. Disisi yang lain, mereka memahami silogisme tetapi tidak memahami universal instantiation yang bias disimpulkan. Pada level ketiga, holistic-struktural, siswa memahami komponen, hubungan antar mereka dan bagaimana menghubungkan mereka. Kemudian, mereka mampu mengonstruksi bukti dan sadar akan hubungan hirarkis antara teorema dan konstruksi bukti mereka.

Dalam mengonstruksi bukti geometris formal, siswa atau penyusun bukti membutuhkan beberapa kemampuan khusus, meliputi kemampuan konseptualisasi global, konseptualisasi local, deduksi local dan deduksi global (Handscomb, 2006). Konseptualisasi global terkait dengan kemampuan dalam mengaitkan sifat-sifat dengan suatu gambar/bangun geometris. Hasil dari global konseptualisasi bisa diarahkan pada sifat umum. Kemampuan konseptualisasi local terkait pemahaman akan hubungan anatar komponen-komponen gambar, seperti sifat-sifat yang memiliki empat sisi sama besar dan empat sudut yang sama besar mungkin bisa dikonseptualisasikan dari suatu gambar persegi. Kemampuan deduksi local terkait dengan penarikan kesimpulan dari satu konseptualisasi ke konseptualisasi yang lain. Lokal konseptualisasi bisa berwujud definisi, eliminasi, deduksi aljabar, dan proposisi (hasil dari deduksi global sebelumnya). Sedangkan kemampuan deduksi global terkait dengan kemampuan dalam membuktikan proposis geometris. Dalam hal ini, ketika deduksi lokal-deduksi lokal dirangkai berdasarkan rencana strategi, maka hasilnya disebut konseptualisasi global.

Problematika dalam Penalaran Berbasis Gambar

Banyak siswa menemui kesulitan dalam belajar geometri. Dalam hal ini, peneliti mengklaim bahwa ada banyak kesalahan geometris yang dilakukan siswa sebagai hasil dari konseptualisasi dari data incidental gambar (*incidental image data*). Hal itu yang menyebabkan jabakan/kerumitan dari penalaran berbasis gambar. Secara umum, ada beberapa kategori besar terjadinya kesalahan(Handscomb, 2005).

a. Konsep yang diasosiasikan dengan sifat-sifat incidental (KASI)

Insidental data merupakan pemicu kesulitan siswa dalam memahami konsep, khususnya di geometri. Sebagai contoh, miskonsepsi bahwa jajargenjang tidak mempunyai sudut siku-siku terus terjadi karena gambar yang dijadikan contoh sebagai salahsatu jajargenjang pada kebanyakan buku teks tidak menunjukkan sudutnya siku-siku. Masalah ini tampaknya disebabkan oleh abstraksi empiris yang tidak akurat pada tahap formasi konsep sebagai akibat sedikitnya percontohan (*instatiation*) yang diberikan pada siswa untuk menyimpulkan konsep secara benar.

b. Konseptualisasi dari sifat-sifat incidental (KSI)

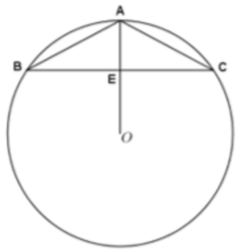
Kebutuhan akan validitas dari penalaran berbasis gambar adalah bahwa hanya diagram skematis dan sifat-sifat skematis yang diperbolehkann untuk dikonseptualisasi dari gambar. Kesalahan mengidentifikasi hal-hal yang dibutuhkan merupakan sumber dari kesalahan konseptualisasi.

Contoh konseptualisasi dari sifat-sifat incidental misalnya seorang siswa mengasumsikan bahwa dua garis kongruen karena keduanya terlihat kongruen dari gambarnya; sedangkan contoh konseptualisasi global dari sifat incidental yakni ketika gambar dari segiempat dikonseptualisasi sebagai persegi, ketika hal ini seharusnya untuk merepresentasikan lebih ke bentuk umumnya.

Hasil Penelitian dan Pembahasan Proses Berpikir Mahasiswa

Untuk mendemontrasikan model pengembangan konsep-gambar (image-concept model devoloped) dalam pembuktian Euclid, penelitian ini menganalisis pekerjaan siswa dalam membuktian suatu proposisi/pernyataan. Gambar 6 berikut salah satu contoh pernyataan/proposisi yang dibuktikan oleh subjek penelitian.

Misalkan titik-titik A, B dan C terletak pada lingkaran O, seperti yang terlihat pada gambar:

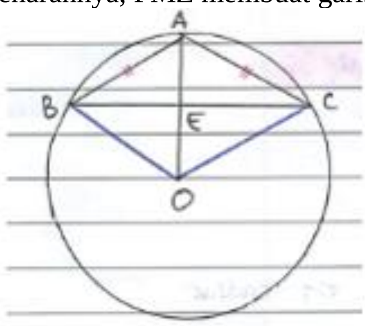


tunjukkan bahwa garis $\overleftrightarrow{OA}$ merupakan bisector ruas garis $\overline{BC}$.'

Gambar 6. Soal untuk Subjek Penelitian

Pada saat mengerjakan pembuktian, subjek diminta mensuarakan yang dipikirkannya (think aloud). Hal ini berguna untuk menginterpretasi apa yang sebenarnya dipikirkan oleh subjek selama membuktikan atau mendapatkan pernyataan yang mendukung proses pembuktiannya. Dan untuk melihat struktur/skema berpikirnya, subjek diminta menuliskan skema analisnya terlebih dahulu sebelum menuliskan pembuktiannya dalam bentuk tabel. Berikut ini contoh pembuktian yang dilakukan oleh salahsatu subjek penelitian yakni subjek FMZ.

Setelah membaca pernyataan yang diberikan, gambar yang mentertai pernyataan yang diberikut dan kesimpulan yang akan ditunjukkan kebenarannya, FMZ membuat garis seperti yang terlihat pada Gambar 7.

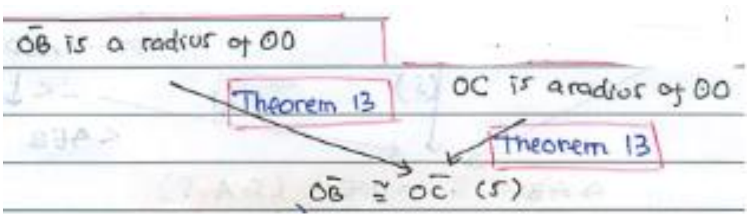


Gambar 7. Salah Satu Pekerjaan Subjek Ujicoba

Berikut transcript pada saat FMZ melakukan think aloud yang terjadi pada saat subjek mengerjakan pembuktian tersebut:

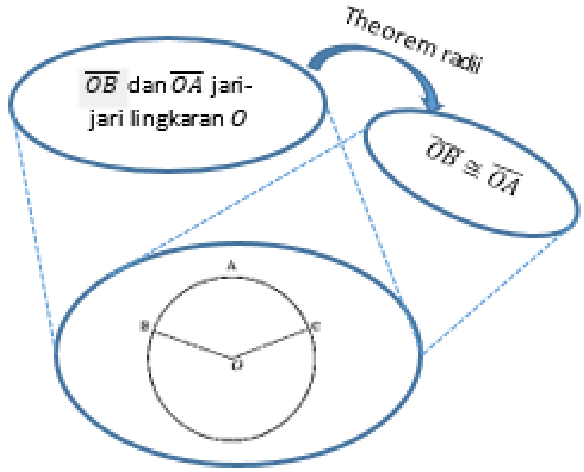
FMZ : berdasarkan gambar yang diberikan, dari dua titik O dan B serta titik O dan C dapat dibuat garis OB dan OC. Dan berdasarkan definisi jari-jari, maka dapat disimpulkan bahwa ruas garis OB dan OC adalah jari-jari lingkaran O. Oh ya…berdasarkan teorema bahwa semua jari-jari kongruen, jadi ruas garis OB dan ruas garis OC kongruen.

Setelah mensuarakan yang dipikirkannya, FMZ menulis skema analisisnya seperti yang terlihat pada Gambar 8 berikut.



Gambar 8. Skema Analisis Subjek Ujicoba

Berdasarkan pernyataan dan tulisan FMZ dapat diinterpretasi bahwa Subjek FMZ membuat konseptualisasi gambar, untuk kasus ini, konseptualisasi yang dibuat adalah konseptualisasi prinsip 3 bahwa jika "ruas garis $\overline{OB}$ dan $\overline{OC}$ adalah jari-jari lingkaran" mengkonseptualisasi gambar, dan "ruas garis $\overline{OB}$ dan $\overline{OC}$ adalah jari-jari lingkaran" berakibat bahwa "$\overline{OB} \cong \overline{OC}$", maka "$\overline{OB} \cong \overline{OC}$" juga merupakan konseptualisasi gambar. Secara visual, konseptualisasi image yang dibuat oleh FMZ direpresentasikan oleh Gambar 9 berikut.



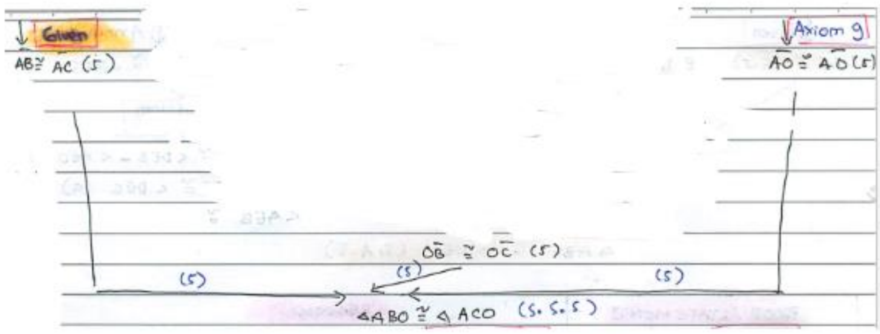
Gambar 9. Konseptualisasi Prinsip 3 oleh FMZ

Dalam konteks pemahaman struktur bukti, FMZ menggunakan universal instantiation dari proposisi universal, dalam hal ini adalah teorema jari-jari untuk membuat kesimpulan dari premis yang diberikan sehingga membentuk suatu proposisi singular yakni “ jika $\overline{OB}$ dan $\overline{OA}$ adalah jari-jari lingkaran O, maka $\overline{OB} \cong \overline{OA}$ (Miyazaki, Fujita, & Jones, 2016).

Berdasarkan gambar 8 yang dibuat oleh FMZ melalui proses melengkapi identitas gambar berdasarkan pernyataan yang diberikan dan gambar yang diberikan dalam pernyaatan awal (soal), FMZ memunculkan pernyataan-pernyataan baru lainnya yang dituliskan dalam bentuk skema. Berikut transkrip pada saat FMZ melakukan *think aloud*:

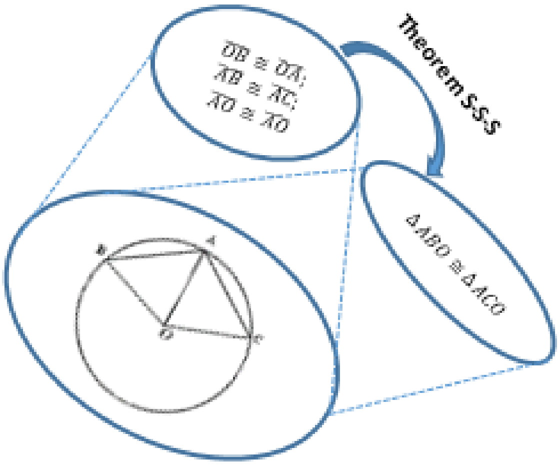
FMZ : karena diberkan ruas garis AB dan AC kongruen dan tadi juga didapat kesimpulan bahwa OB dan OC kongruen….daaan…menurut aksioma sifat refleksif maka AO kongruen AO, maka menurut teorema sisi-sisi-sisi dapat disimpulkan bahwa segitiga ABO dan segitiga ACO kongruen.

Pada saat mensuarakan pikirannya, FMZ menuliskan skema analisisnya seperti yang terlihat pada Gambar 10 berikut.



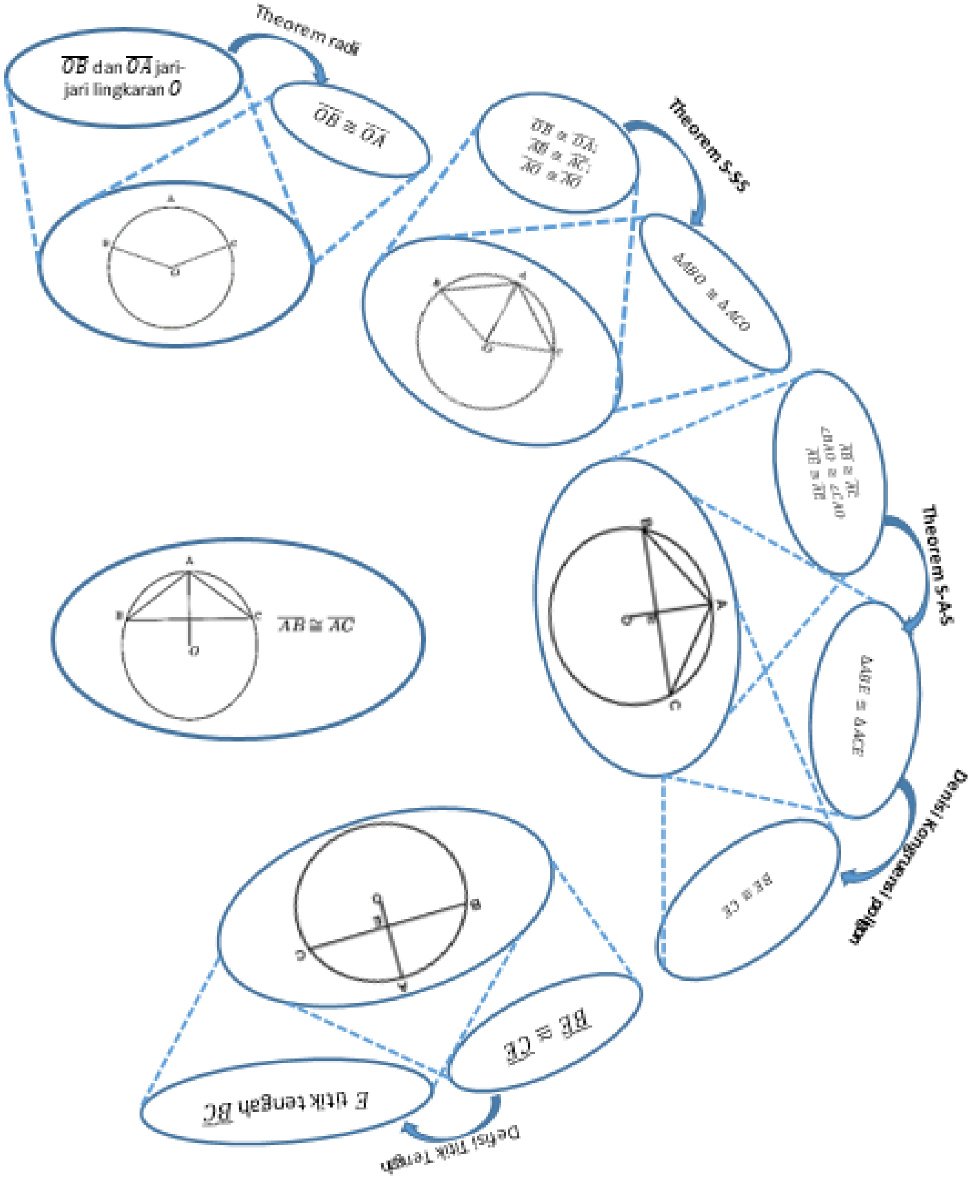
Gambar 10. Skema Analisis yang dibuat FMZ

Berdasarkan pernyataan (transkrip) dan tulisan (skema analisis) dapat disimpulkan bahwa FMZ membuat konseptualisasi gambar, prinsip 3, bahwa jika “OB kongruen OA, AB kongruen AC dan AO kongruen AO” mengkonseptualisasi gambar, dan “OB kongruen OA, AB kongruen AC dan AO kongruen AO” berakibat “segitiga ABO dan segitiga ACO kongruen”, maka “segitiga ABO dan segitiga ACO kongruen” merupakan konseptualisasi gambar juga. Secara visualisasi konseptualisasi tersebut disajikan oleh Gambar 11 berikut ini.



Gambar 11. Visualisasi Konseptualisasi Gambar yang dilakukan oleh FMZ

Secara lengkap dekonstruksi bukti proposisi yang dilakukan subjek FMZ disajikan pada Gambar 12 berikut.



Gambar 12. Dekonstruksi Pembuktian Proposisi

Subjek bisa menerapkan konseptualisasi prinsip 3 untuk menjamin bahwa suatu pernyataan/sifat-sifat baru merupakan konseptualisasi konseptualisasi local. Selanjutnya, menggunkan prinsip 4 konseptualisasi, konseptualisasi atau pernyataan baru yang menyertai merupakan konseptualisasi dari gambar keseluruhan. (global diagram). Kemudian, focus pembuktian berganti pada bagian baru dari gambar untuk menghasilkan local deduksi lainnya. Local deduksi-lokal deuksi tersebut saling terkait tergantung pada global argument yang dimaksud.

Menarik untuk dicatat bahwa sifat-sifat atau lokal deduktif bersifat relasional. Sebagai contoh garis terkait dengan lingkaran dalam hal jari-jari lingkaran dan tali busur, dua segitiga terkait dengan kekongruenan segitiga, dan seterusnya. Local konseptualisasi, ralasional, mengacu pada hubungan relational diantara komponen-komponen gambar (image). Komponen-kompoenen yang bervariasi pada proses pembuktian deduktif diidentifikasi sebagai local dan global konseptualisasi.

Lebih jauh, jika analis jawaban FMZ menggunakan kerangka kerja pemahama struktur bukti dari Miyazaki, maka dapat disimpulkan bahwa level pemahaman struktur bukti dari FMZ dikategorikan berada di level holistic-struktural. Dalam hal ini FMZ sudah bias melihat sebuah bukti secara menyeluruh, dimana premis dan kesimpulan terkoneksi secara logis via universal instantiation dan hypothetical syllogism (Miyazaki, Fujita, & Jones, 2015).

PENUTUP

Kemampuan untuk membuktikan terdiri dari kemampuan dalam mengonstruksi bukti dan menvalidasi bukti. Mengonstruksi bukti terkait dengan kemampuan membuat konseptualisasi gambar, menemukan lokal-lokal konseptualisasi (sifat/kesimpulan terkait salah satu bagian dari gambar) dan global konseptualisasi. Menvalidasi biasanya menekankan pada proses mengkaitkan hubungan relational antara local konseptualisasi dan global konseptualisasi menjadi serangkain pernyataan yang mendukung proposisi/konklusi yang akan dibuktikan menjadi serangkaian pernyataan yang logis. Dengan kata lain menvalidasi adalah kegiatan melanjutkan secara linier dari awal sampai akhir dari suatu bukti tertulis, mungkin saja diulang berkali-kali. Urutan linier ini tidak selalu terjadi dalam proses konstruksi bukti.

Jika diberikan suatu proposisi untuk dibuktikan, seseorang bisa mulai pada bagian awal saja tetapi juga bisa dimulai dari dibagian akhir bukti sebelum mengembangkan bagian tengahnya. Selain itu, banyak bukti memiliki struktur hirarkis berdasarkan lokal deduksi (sub bukti) dan lokal konseptualisasi (sub konstruksi) yang muncul selama proses konstruksi bukti. Menvalidasi berarti juga bertanya dan menjawab pertanyaan, menyetujui klaim, membangun sub bukti, mengingat atau menemukan dan menafsirkan teorema lain dan definisi, sesuai dengan petunjuk (misalnya, untuk mempertimbangkan atau nama sesuatu), dan perasaan sadar (tapi mungkin nonverbal) dari kebenaran atau kesalahan.

DAFTAR RUJUKAN

Dumas, B. A., & McCarthy, J. E. (2014). *Transition to Higher Mathematics: Structure and Proof*. Saint Louis, Missouri: Washington University in St. Louis. https://doi.org/10.7936/K7Z899HJ

Guven, B., & Baki, A. (2010). Characterizing student mathematics teachers' levels of understanding in spherical geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(8), 991–1013. https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.500692

Handscomb, K. (2005). *IMAGE-BASED REASONING IN GEOMETRY*. SIMON FRASER UNIVERSITY.

Handscomb, K. (2006). PRINCIPLES OF CONCEPTUALIZATION FOR IMAGE-BASED REASONING IN GEOMETRY. In *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 418–420). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Jone, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *Inter-Nat. J. Math. Ed. Sci. Tech*. https://doi.org/10.1080/002073900287381

Kwoen, J. (2002). Philosophical perspective on proof in mathematics education. *Philos-Ophy of Mathematics Education Journal*, *16*.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 223–239.

Miyazaki, M., Fujita, T., Jones, K., & Iwanaga, Y. (2017). Designing a Web-based Learning Support System for Flow-chart Proving in School Geometry. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *3*(3), 233–256.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 249–266. https://doi.org/10.1007/BF01273731

NCTM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. *School Science and Mathematics*, *47*(8), 868–279. Retrieved from www.nctm.org

Oflaz, G., Bulut, N., & Akcakin, V. (2016). Pre- Service Classroom Teachers ' Proof Schemes in Geometry : A Case Study of Three Pre-service Teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, (63), 133–152. https://doi.org/10.14689/ejer.2016.63.8

Ozmantar, M. F. (2017). A Historical Analysis of Primary Mathematics Curricula in Terms of Teaching Principles. *International Journal of Research in Education and Science*, 327–327. https://doi.org/10.21890/ijres.327890

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6

Tall, D. (1995). Cognitive development , representations and proof. In *Justifying and Proving in School Mathematics* (pp. 27–38). London.

Tall, D. (1999). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? *Conference of the University of Chicago School Mathematics Project*, 1–18.

Ufer, S., Heinze, A., & Reiss, K. (2009). Mental models and the development of geometric proof competency. *Pme 33: Proceedings of the 33Rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 5*, *5*, 257–264.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally*. Boston: Pearson Education Inc.